

テーマ 倍数判定法

倍数判定法は、約分のときなどに役立つので、しっかりマスターしておきましょう。
実用的な倍数判定法は以下の通りです。

- 2 の倍数 → 下 1 桁（一の位）が 2 の倍数（0 も含む）
- 3 の倍数 → 各位の和が 3 の倍数
- 4 の倍数 → 下 2 桁が 4 の倍数（0 0 も含む）
- 5 の倍数 → 下 1 桁（一の位）が 0 か 5
- 8 の倍数 → 下 3 桁が 8 の倍数（0 0 0 も含む）
- 9 の倍数 → 各位の和が 9 の倍数
- 11 の倍数 → 各位の数から 1 つおきにとった数の合計の差が 11 の倍数（0 も含む）

なお、例えば 6 の倍数の判定法は、2 の倍数の判定法と 3 の倍数の判定法を組み合わせただけになります。

（2 の倍数、4 の倍数、8 の倍数、5 の倍数の判定法について）

「5 と 2 は仲良し」を利用すれば、2 の倍数、4 の倍数、8 の倍数、5 の倍数の判定法が得られます。なお、あまり使いませんが、25 の倍数の判定法、125 の倍数の判定法も得られます。

$5 \times 2 = 10$ だから、一の位を除いた部分の数は必ず 2 の倍数となっています。したがって、ある数が 2 の倍数であるためには、一の位が 2 の倍数であればよいことになります。5 の倍数についてもまったく同様に説明できます。

$$\begin{aligned} & \text{(例) } 351 \\ &= 350 + 1 \\ &= 35 \times 10 + 1 \\ &= \underline{35 \times 5 \times 2} + \underline{1} \rightarrow 2 \text{ の倍数でない} \\ & \quad 2 \text{ の倍数} \quad 2 \text{ の倍数でない} \\ & 9286 \\ &= 9280 + 6 \\ &= 928 \times 10 + 6 \\ &= \underline{928 \times 5 \times 2} + \underline{6} \rightarrow 2 \text{ の倍数} \\ & \quad 2 \text{ の倍数} \quad 2 \text{ の倍数} \\ & 351 \\ &= 350 + 1 \\ &= 35 \times 10 + 1 \end{aligned}$$

$$= \underline{35 \times 5 \times 2 + 1} \rightarrow 5 \text{ の倍数でない}$$

5 の倍数 5 の倍数でない

$$9285$$

$$= 9280 + 5$$

$$= 928 \times 10 + 5$$

$$= \underline{928 \times 5 \times 2 + 5} \rightarrow 5 \text{ の倍数}$$

5 の倍数 5 の倍数

$25 \times 4 = 100$ だから、下 2 桁の数を除いた部分の数は必ず 4 の倍数となっています。したがって、ある数が 4 の倍数であるためには、下 2 桁が 4 の倍数であればよいことになります。25 の倍数についてもまったく同様に説明できます。

(例) 351

$$= 300 + 51$$

$$= 3 \times 100 + 51$$

$$= \underline{3 \times 25 \times 4 + 51} \rightarrow 4 \text{ の倍数でない}$$

4 の倍数 4 の倍数でない

$$9236$$

$$= 9200 + 36$$

$$= 92 \times 100 + 36$$

$$= \underline{92 \times 25 \times 4 + 36} \rightarrow 4 \text{ の倍数}$$

4 の倍数 4 の倍数

$$351$$

$$= 300 + 51$$

$$= 3 \times 100 + 51$$

$$= \underline{3 \times 25 \times 4 + 51} \rightarrow 25 \text{ の倍数でない}$$

25 の倍数 25 の倍数でない

$$9275$$

$$= 9200 + 75$$

$$= 92 \times 100 + 75$$

$$= \underline{92 \times 25 \times 4 + 75} \rightarrow 25 \text{ の倍数}$$

25 の倍数 25 の倍数

$125 \times 8 = 1000$ だから、下 3 桁の数を除いた部分の数は必ず 8 の倍数となっています。したがって、ある数が 8 の倍数であるためには、下 3 桁が 8 の倍数であればよいことになります。125 の倍数についてもまったく同様に説明できます。

(例) 2354

$$= 2000 + 354$$

$$= 2 \times 1000 + 354$$

$$= \underline{2 \times 125 \times 8} + \underline{354} \rightarrow 8 \text{ の倍数でない}$$

8 の倍数 8 の倍数でない

$$9256$$

$$= 9000 + 256$$

$$= 9 \times 1000 + 256$$

$$= \underline{9 \times 125 \times 8} + \underline{256} \rightarrow 8 \text{ の倍数}$$

8 の倍数 8 の倍数

$$4351$$

$$= 4000 + 351$$

$$= 4 \times 1000 + 351$$

$$= \underline{4 \times 125 \times 8} + \underline{351} \rightarrow 125 \text{ の倍数でない}$$

125 の倍数 125 の倍数でない

$$9375$$

$$= 9000 + 375$$

$$= 9 \times 1000 + 375$$

$$= \underline{9 \times 125 \times 8} + \underline{375} \rightarrow 125 \text{ の倍数}$$

125 の倍数 125 の倍数

(3 の倍数、9 の倍数の判定法について)

洛星中学校 02 年後期 2 第 1 問を取り上げて説明します。

(問題)

3 けたの整数は

$$(\text{百の位の数}) \times 100 + (\text{十の位の数}) \times 10 + (\text{一の位の数})$$

と表せます。

$$(\text{百の位の数}) + (\text{十の位の数}) + (\text{一の位の数})$$

が 9 の倍数であれば、その 3 けたの整数も 9 の倍数になります。その理由をわかりやすく説明しなさい。

(解説)

百の位の数 を A、十の位の数 を B、一の位の数 を C とします。

3 けたの整数は

$$A \times 100 + B \times 10 + C$$

$$= A \times (99 + 1) + B \times (9 + 1) + C \quad \leftarrow 9 \text{ の倍数を作り出そうとしています。}$$

$$= A \times 99 + A + B \times 9 + B + C \quad \leftarrow \text{分配法則を使いました。}$$

$$= 9 \times (A \times 11 + B) + (A + B + C) \quad \leftarrow A \times 99 + B \times 9 \text{ の部分で、分配法則の逆を使いました。}$$

となります。

$9 \times (A \times 11 + B)$ は9の倍数だから、 $A + B + C$ が9の倍数であれば、3けたの整数「 $A \times 100 + B \times 10 + C$ 」も9の倍数となります。

なお、桁数が4桁以上になっても同様に説明できますね。

最後のところを

$$\begin{aligned} & 9 \times (A \times 11 + B) + (A + B + C) \\ &= \underline{3 \times 3 \times (A \times 11 + B)} + (A + B + C) \\ & \quad 3 \text{ の倍数} \end{aligned}$$

と変形すれば、3の倍数の判定法が9の倍数の判定法と同様であることが理解できますね。

(11の倍数の判定法について)

99、9999、999999、・・・のように、9が偶数個並んだ数は、11の倍数です。また、これを10倍した数に11を加えた数（ $99 \times 10 + 11 = 1001$ 、 $9999 \times 10 + 11 = 100001$ 、 $999999 \times 10 + 11 = 10000001$ 、・・・）も11の倍数です。

例えば、82478の場合を考えてみましょう。

$$\begin{aligned} & 82478 \\ &= 8 \times 10000 + 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \\ &= 8 \times (9999 + 1) + 2 \times (1001 - 1) + 4 \times (99 + 1) + 7 \times (11 - 1) + 8 \quad \leftarrow \text{分配法則を利用します。} \\ &= \underline{8 \times 9999 + 2 \times 1001 + 4 \times 99 + 7 \times 11} + 8 - 2 + 4 - 7 + 8 \\ & \quad 11 \text{ の倍数} \end{aligned}$$

となるから、 $8 - 2 + 4 - 7 + 8$ （ $8 + 4 + 8$ と $2 + 7$ の差ですね）の部分が11の倍数であれば、82478も11の倍数であることになります（この場合は、11の倍数になりますね）。

(例) 次の計算をなさい。

$$171 \div 54$$

(解説)

まずわり算を分数になおしましょう。

$$\begin{aligned} & 171 \div 54 \\ &= 171/54 \quad \leftarrow 171 \text{ も } 54 \text{ も } 9 \text{ の倍数ですね。} \\ & \quad 1 + 7 + 1 = 9 \text{ も } 5 + 4 = 9 \text{ も } 9 \text{ の倍数だからです。} \\ &= 19/6 \quad \leftarrow 9 \text{ で約分しました。} \end{aligned}$$